

CHAPITRE 1

La transformation de Fourier

1. Introduction

Le but de l'analyse de Fourier est la décomposition de fonctions arbitraires comme superposition linéaire de fonctions élémentaires. Par fonctions élémentaires, on entend ici des fonctions régulières qui soient vecteurs propres de la dérivation, au sens que

$$(1) \quad \partial_j \chi(x) = \lambda_j \chi(x)$$

le but étant en quelque sorte de « diagonaliser » la dérivation — tout ceci reste évidemment bien formel dans la mesure où l'on n'a pas donné de sens à la notion de valeurs propres, vecteurs propres dans des espaces de fonctions, qui sont de dimension infinie.

Le système d'équations (1) se résout, et les solutions s'écrivent à une constante multiplicative près

$$\chi(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right)$$

et si l'on se restreint aux solutions bornées,

$$\chi_\xi(x) = e^{ix \cdot \xi}$$

avec $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$. L'objectif est donc de pouvoir décomposer une fonction (sinon pour toute du moins pour certaines classes de fonctions) comme une somme continue de la forme

$$f(x) = \int c(f; \xi) \chi_\xi(x) d\xi$$

où $\chi_\xi(x)$ sont des fonctions bornées vérifiant (1). L'idée maîtresse est que sous réserve de pouvoir intervertir dérivation et somme, la dérivation

$$\partial_j f(x) = \int i\xi_j c(f; \xi) \chi_\xi(x) d\xi$$

est remplacée par la multiplication par $i\xi_j$.

Ceci amène à la définition de la transformée de Fourier qui permet de réaliser de telles décompositions au moins pour des fonctions de classe L^2 . Le stade suivant est de donner un sens à cette opération pour des distributions.

On notera dans tout le chapitre $D_j = -i\partial_j$.

2. Transformation de Fourier dans L^2

Dans cette section, on commence par définir et étudier succinctement la transformée de Fourier des fonctions $L^2(\mathbf{R}^n)$.

DÉFINITION 2.1. Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, la transformée de Fourier de la fonction f est la fonction bornée et continue définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n.$$

En fait, l'information sur le caractère borné de $\hat{f}$ peut être améliorée.

LEMME 2.2 (Lemme de Riemann–Lebesgue). Soit f une fonction $L^1(\mathbf{R}^n)$, la transformée de Fourier de f tend vers 0 lorsque $|\xi|$ tend vers l'infini.

PREUVE. Pour une fonction $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, c'est une simple intégration par parties. Le résultat général découle de la densité de ces fonction dans $L^1(\mathbf{R}^n)$ et de l'inégalité $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$. $\square$

EXEMPLE 1. $\widehat{e^{-\varepsilon|x|^2/2}} = (2\pi/\varepsilon)^{n/2} e^{-|\xi|^2/2\varepsilon}$

En effet, grâce au théorème de Fubini, on se ramène au cas $n = 1$, puis par un changement de variable au cas $\varepsilon = 1$, enfin grâce à une intégration par parties, on constate que la transformée de Fourier $g(\xi)$ vérifie l'équation différentielle

$$g' + \xi g = 0$$

ce qui donne le résultat en intégrant, étant donné que

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Voici quelques propriétés de la transformée de Fourier dont nous aurons besoin par la suite.

PROPOSITION 2.3. Soit f une fonction de $L^1(\mathbf{R}^n)$.

(1) Si de plus f est $\mathcal{C}^1$ et $D_j f \in L^1$, alors $\widehat{D_j f} = \xi_j \hat{f}$.

(2) Si de plus $x_j f \in L^1$ alors $\hat{f}$ est $\mathcal{C}^1$ et $D_j \hat{f} = -\widehat{x_j f}$.

(3) Si $g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ alors $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$.

PREUVE. Le premier résultat vient d'une intégration par parties — en remarquant que la limite de f en $\pm\infty$ est nulle puisque

$$f(x) = \frac{1}{x_j} \int_{x_j}^{2x_j} f(x_1, \dots, t, \dots, x_n) dt + \int_{x_j}^{2x_j} \partial_j f(x_1, \dots, t, \dots, x_n) \left(\frac{t}{x_j} - 1\right) dt$$

et donc

$$|f(x)| \leq \frac{1}{|x_j|} \|f\|_{L^1} + \int_{x_j}^{2x_j} |\partial_j f(x_1, \dots, t, \dots, x_n)| dt \rightarrow 0$$

lorsque x_j tend vers $\pm\infty$. Le deuxième résultat vient du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.

Quant au troisième résultat, si f et g sont de classe L^1 (alors $f * g$ est L^1) il suffit d'utiliser le théorème de Fubini et un changement de variable

$$(\hat{f}\hat{g})(\xi) = \iint e^{-i(x+y)\cdot\xi} f(x)g(y) dx dy = \iint e^{-iz\cdot\xi} f(x)g(z-x) dx dz$$

pour obtenir l'égalité désirée. $\square$

À présent, il faut se soucier de trouver une formule d'inversion pour la transformation de Fourier.

THÉORÈME 2.4. *Si $f \in L^1$ est telle que $\hat{f} \in L^1$ alors on a*

$$\hat{\hat{f}} = (2\pi)^n \check{f}.$$

PREUVE. Grâce au théorème de Fubini, on commence par écrire

$$(2) \quad \widehat{e^{-\varepsilon|\xi|^2/2} \hat{f}} = \iint e^{-i(x+y)\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2/2} f(y) d\xi dy = (2\pi/\varepsilon)^{\frac{n}{2}} e^{-|x|^2/2\varepsilon} * \check{f}$$

ce qui donne également

$$(2\pi)^n \varepsilon^{-\frac{n}{2}} e^{-|x|^2/2\varepsilon} * \check{f} = \int e^{-ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2/2} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Comme la gaussienne $(2\pi\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} e^{-|x|^2/2\varepsilon}$ est une approximation de l'unité, le premier terme converge vers $(2\pi)^n \check{f}$ presque partout et grâce au théorème de convergence dominée, le deuxième terme tend vers la transformée de Fourier de $\hat{f}$. On obtient donc l'égalité désirée en faisant tendre ε vers 0. $\square$

Grâce au théorème précédent, si $f \in L^1$ et si $\hat{f} \in L^1$ alors on peut écrire f comme

$$(3) \quad f(x) = (2\pi)^{-n} \int \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi$$

ce qui est exactement ce qu'on cherchait à faire dans l'introduction.

On a donc défini une transformation linéaire, une formule d'inversion valable pour certaines fonctions. Le problème est de savoir sur quels espaces agit cette transformation : à part la propriété donnée par le lemme de Riemann-Lebesgue, on n'a pas de caractérisation simple de l'image de L^1 par la transformée de Fourier. Pour remédier à cela, on prolonge la définition sur L^2 où la transformation agit en un isomorphisme (une isométrie selon la convention choisie).

THÉORÈME 2.5 (Théorème de Plancherel). *Si $f, g \in L^1$ alors on a la formule de Parseval*

$$(\hat{f}, g)_{L^2} = (f, \check{g})_{L^2}$$

par conséquent, si $f \in L^1 \cap L^2$ alors

$$(4) \quad \|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L^2}.$$

PREUVE. D'après le théorème de Fubini, on a

$$(\hat{f}, g)_{L^2} = \iint e^{-ix \cdot \xi} f(x) \bar{g}(\xi) dx d\xi = (f, \check{g})_{L^2}$$

et (4) est une conséquence directe si $f, \hat{f} \in L^1$ (en choisissant $g = \hat{f}$). Dans le cas où $f \in L^1 \cap L^2$, la relation (2) donne

$$\widehat{e^{-\varepsilon|\xi|^2/2} \hat{f}} = (2\pi/\varepsilon)^{\frac{n}{2}} e^{-|x|^2/2\varepsilon} * \check{f} \in L^1$$

car $\hat{f} \in L^\infty$ (puisque $f \in L^1$) et la gaussienne est L^1 , donc on peut appliquer (4)

$$\varepsilon^{-\frac{n}{2}} \|e^{-|x|^2/2\varepsilon} * \check{f}\|_{L^2} = \|e^{-\varepsilon|\xi|^2/2} \hat{f}\|_{L^2}.$$

Le terme de droite tend vers $\|\hat{f}\|_{L^2}$ par le théorème de convergence dominée, le terme de gauche vers $(2\pi)^{n/2} \|\check{f}\|_{L^2}$ car la gaussienne $(2\pi\varepsilon)^{-n/2} e^{-|x|^2/2\varepsilon}$ est une approximation de l'unité. $\square$

DÉFINITION 2.6. *Étant donné que $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2 et en vertu de l'égalité (4), on peut prolonger de manière unique la transformation de Fourier définie sur $L^1 \cap L^2$ en un isomorphisme¹ sur L^2 vérifiant (4)*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(\mathbf{R}^n) &\rightarrow L^2(\mathbf{R}^n) \\ f &\rightarrow \mathcal{F}(f) = \hat{f} \end{aligned}$$

dont l'application inverse est donnée par $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}^* = (2\pi)^{-n} \check{\mathcal{F}}$.

REMARQUE 2.7. Il faut faire attention au domaine de validité des formules définissant la transformée de Fourier. Telle qu'écrite dans la définition, la formule n'a a priori un sens que si $f \in L^1$. La transformée de Fourier d'une fonction L^2 n'est définie que par un passage à la limite. Soit $\chi \in L^\infty \cap L^1$, continue au voisinage de 0, telle que $\chi(0) = 1$, on a

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int e^{-ix \cdot \xi} \chi(\varepsilon x) f(x) dx \quad (\text{dans } L^2)$$

puisque $\|\chi(\varepsilon \cdot) f - f\|_{L^2} \rightarrow 0$ par le théorème de convergence dominée et $\chi(\varepsilon \cdot) f \in L^1 \cap L^2$. Ceci peut donner des formules de calcul effectif dans certains cas, par

¹Avec d'autres conventions pour la transformée de Fourier, on peut s'arranger pour que cette application soit une isométrie.

exemple en choisissant $\chi = 1_{|x|<1}$

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{|x|<r} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$$

ou en choisissant $\chi = e^{-|x|^2/2}$

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int e^{-ix \cdot \xi} e^{-\varepsilon|x|^2/2} f(x) dx.$$

EXEMPLE 2. $\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{\sin x}{x} e^{-ix \cdot \xi} dx = \pi 1_{[-1,1]}(\xi)$

En effet, l'intégrale

$$\int_{-r}^r \frac{\sin x}{x} e^{-ix \cdot \xi} dx = 2 \int_0^r \frac{\sin x}{x} \cos(x \xi) dx = \int_{r(\xi-1)}^{r(\xi+1)} \frac{\sin x}{x} dx$$

tend vers $\pi 1_{[-1,1]}(\xi)$ lorsque $r \rightarrow +\infty$.

REMARQUE 2.8. Jusqu'à présent les définitions de la transformée de Fourier n'ont été données que dans L^1 et dans L^2 . Pour le moment, aucune définition n'a été donnée pour des fonctions L^1_{loc} . Par exemple, on ne sait pas ce que pourrait être la transformée de Fourier de la fonction de Heaviside $\hat{H}$. L'objet de ce chapitre est de donner un sens à la transformée de Fourier de certaines distributions, en particulier de certaines fonctions L^1_{loc} .

3. Autour du principe d'incertitude de Heisenberg

La question de savoir quelle est l'action de la transformation sur le support d'une fonction et en particulier de savoir si une fonction à support compact reste à support compact est d'intérêt pour la suite.

Un premier élément de réponse est fourni par l'exemple de la gaussienne. En effet, bien que le support de la gaussienne $\varepsilon^{n/2} e^{-|x|^2/2\varepsilon}$ soit $\mathbf{R}$, il suffit de tracer le graphe de cette fonction pour différentes valeurs de $\varepsilon > 0$ pour se rendre compte qu'elle est d'autant plus concentrée près de 0 que ε est petit — c'est même ce qui en fait une approximation de l'unité. Au contraire sa transformée de Fourier $(2\pi)^{n/2} e^{-\varepsilon|x|^2/2}$ est d'autant moins concentrée en 0 que ε est petit.

On peut en fait donner une réponse plus précise à la question.

LEMME 3.1. *Une fonction $\mathcal{C}_0^\infty$ dont la transformée de Fourier est à support dans un ensemble borné dans l'une des directions x_j est la fonction nulle. En particulier, la seule fonction $\mathcal{C}_0^\infty$ dont la transformée de Fourier est $\mathcal{C}_0^\infty$ est la fonction nulle.*

PREUVE. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ dont la transformée de Fourier est à support dans $[-a, a] \times \mathbf{R}^{n-1}$. La fonction $\hat{\varphi}$ peut être prolongée en une fonction holomorphe dans la première variable

$$\tilde{\varphi}(\zeta_1, \xi') = \int e^{-i(\zeta_1 x_1 + \xi' \cdot x')} \varphi(x) dx, \quad \forall (\zeta_1, \xi') \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}^{n-1}.$$

En effet cette dernière formule définit bien une fonction holomorphe sur $|\zeta_1| < r$ car la majoration

$$|e^{-i(\zeta_1 x_1 + \xi' \cdot x')} \varphi(x)| \leq e^{ar} |\varphi(x)| \in L^1$$

permet d'appliquer le théorème d'holomorphie pour les intégrales dépendant d'un paramètre (ceci pour tout $r > 0$), de plus elle coïncide avec $\hat{\varphi}$ sur $\mathbf{R}^n$. La fonction $\zeta_1 \rightarrow \tilde{\varphi}(\zeta_1, \xi')$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et nulle sur $\mathbf{R} \setminus [-a, a]$, elle est donc identiquement nulle, et ceci quel que soit ξ' . Ceci implique que $\hat{\varphi}$ est nulle et donc φ . $\square$

Ce lemme est une première formulation du principe d'incertitude de Heisenberg, qui stipule qu'on ne peut à la fois localiser une fonction et sa transformée de Fourier.

Voici une autre version du principe d'incertitude d'Heisenberg.

THÉORÈME 3.2. *Soit $u \in L^2$ telle que $\xi_j \hat{u} \in L^2$ et $x_j u \in L^2$. On note $\langle x_j \rangle = (x_j u, u)_{L^2}$, $\langle \xi_j \rangle = (\xi_j \hat{u}, \hat{u})_{L^2}$. Alors on a*

$$(5) \quad \|(x_j - \langle x_j \rangle)u\|_{L^2} \|(\xi_j - \langle \xi_j \rangle)\hat{u}\|_{L^2} \geq \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2.$$

Il y a égalité pour tout $1 \leq j \leq n$ uniquement pour des gaussiennes.

PREUVE. Soit $v \in \mathcal{C}_0^\infty$, on commence par calculer

$$p(t) = \|(tx_j + iD_j)v\|_{L^2}^2 = t^2 \|x_j v\|_{L^2}^2 + \|D_j v\|_{L^2}^2 - 2ti \underbrace{([D_j, x_j]v, v)_{L^2}}_{=i\|v\|_{L^2}^2}$$

ce polynôme est positif pour tout t donc son discriminant est négatif, ce qui donne

$$\|x_j v\|_{L^2}^2 \|D_j v\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{4} \|v\|_{L^2}^4$$

et par des régularisation et troncature, l'inégalité reste vraie² si l'on suppose seulement $x_j v \in L^2$, $\xi_j \hat{v} \in L^2$. En choisissant $v = e^{i\alpha \cdot x} u(x + a)$ où a et α sont des vecteurs dont la seule coordonnée non-nulle est en j ème position et égale à $\langle x_j \rangle$, resp. $\langle \xi_j \rangle$, on obtient l'inégalité désirée.

De plus, s'il y a égalité alors le discriminant de p est nul, donc p admet une racine double t_j , ce qui donne les équations $\partial_j v + t_j x_j v = 0$ et donc $t_j \geq 0$ et $v =$

²Soient $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty$ de moyenne égale à 1, $\chi_\varepsilon = \varepsilon^{-n} \chi(\cdot/\varepsilon)$ et $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty$ telle que $\psi(0) = 1$ alors $\mathcal{C}_0^\infty \ni v_\varepsilon = \psi(\varepsilon \cdot) v * \chi_\varepsilon \rightarrow v$ dans L^2 et de plus

$$x_j v_\varepsilon(x) = \psi(\varepsilon x) (x_j v) * \chi_\varepsilon + \underbrace{\varepsilon \psi(\varepsilon x) v * (x_j \chi)_\varepsilon}_{\text{borné dans } L^2}$$

tend également vers $x_j v \in L^2$ dans L^2 . De même la transformée de Fourier de

$$\partial_j v_\varepsilon(x) = \psi(\varepsilon x) v * \partial_j \chi_\varepsilon + \underbrace{\varepsilon \partial_j \psi(\varepsilon x) v * (x_j \chi)_\varepsilon}_{\text{borné dans } L^2}$$

tend vers $\xi_j \hat{v}$ dans L^2 .

$c \exp(-\sum_{j=1}^n t_j x_j^2)$. La fonction u est alors de la forme $u = \gamma \exp(-\sum_{j=1}^n t_j (x_j - w_j)^2)$ avec w_j complexe, i.e. une gaussienne. $\square$

Ce résultat est une formulation mathématique du principe d'incertitude de Heisenberg formulé en mécanique quantique. Il est fortement lié au fait que $[D_j, x_j] = -i$. Il existe bien d'autres résultats mathématiques tournant autour du même aspect.

4. Espace de Schwartz et distributions tempérées

À présent, on veut prolonger la transformée de Fourier aux distributions : la transformée de Fourier d'une fonction L^2 est une fonction L^2 donc L^1_{loc} , on commence donc par étudier sa caractérisation en terme d'intégral contre des fonctions test pour tenter d'extrapoler une définition plus générale pour les distributions.

Soient $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, on a $\hat{f} \in L^2 \subset L^2_{\text{loc}}$ et d'après la formule de Parseval

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \int \hat{f}(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int f(x) \hat{\varphi}(x) dx.$$

On est donc tenté de définir la transformée de Fourier d'une distribution par la formule

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle.$$

Le problème réside dans le fait que si $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$, ce n'est pas le cas de $\hat{\varphi}$! En effet, $\hat{\varphi}$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ (cf. proposition 2.3), bornée, tendant vers 0 à l'infini, mais elle n'est pas à support compact d'après le lemme 3.1. Le remède consiste à remplacer l'espace $\mathcal{C}_0^\infty$ par un espace de fonctions régulières stable par transformation de Fourier.

DÉFINITION 4.1. *L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^n$ telles que*

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < +\infty$$

pour tous multiindices α, β .

Comme $\mathcal{S} \subset L^1$, on peut calculer la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}$ et les résultats de la section précédente s'appliquent. Comme la transformation de Fourier échange dérivation et multiplication, on a évidemment le résultat suivant :

LEMME 4.2. *L'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ est stable par la transformation de Fourier.*

Il n'est pas dans les objectifs de ce cours de parler de topologie sur $\mathcal{S}$, nous rappelons donc la notion de convergence d'une famille de fonctions dans $\mathcal{S}$.

DÉFINITION 4.3. Soit φ_ε une famille de fonctions de $\mathcal{S}$, on dit que $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$ dans $\mathcal{S}$ si

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta (\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x))| \rightarrow 0$$

lorsque ε tend vers 0, pour tous multiindices α, β (à comparer à la notion de convergence dans $\mathcal{C}_0^\infty$).

La transformation de Fourier est continue sur $\mathcal{S}$ au sens que si $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$ dans $\mathcal{S}$ alors $\hat{\varphi}_\varepsilon \rightarrow \hat{\varphi}$ dans $\mathcal{S}$. Par ailleurs, il est clair que $\mathcal{C}_0^\infty \subset \mathcal{S}$, et on a le résultat de densité suivant :

PROPOSITION 4.4. $\mathcal{C}_0^\infty$ est dense dans $\mathcal{S}$.

PREUVE. Soient $\varphi \in \mathcal{S}$ et $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty$ avec $\chi(0) = 1$, alors $\varphi_\varepsilon(x) = \chi(\varepsilon x)\varphi(x)$ est $\mathcal{C}_0^\infty$ et de plus

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta (1 - \chi(\varepsilon x))\varphi(x)| &\leq \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |(1 - \chi(\varepsilon x))x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \\ &+ \varepsilon \sum_{1 \leq |\gamma| \leq |\beta|} \binom{\beta}{\gamma} \varepsilon^{|\gamma|-1} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^{\beta-\gamma} \varphi(x) \partial^\gamma \chi(\varepsilon x)| \leq C_{\alpha\beta}(\varphi, \chi) \varepsilon. \end{aligned}$$

On a majoré le premier terme par $\varepsilon \sup |\nabla \chi| \sup |x| |x^\alpha \partial^\beta \varphi|$. Ce qui prouve que $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$ dans $\mathcal{S}$ lorsque ε tend vers 0. $\square$

DÉFINITION 4.5. Une distribution tempérée est une forme linéaire u sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ telle qu'il existe une constante $C > 0$ et un entier k tels que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq k} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

L'espace des distributions tempérées est noté $\mathcal{S}'$.

Si $u \in \mathcal{S}'$ et $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$ dans $\mathcal{S}$ alors $\langle u, \varphi_\varepsilon \rangle \rightarrow \langle u, \varphi \rangle$ lorsque ε tend vers 0.

REMARQUE 4.6. Soit $\chi \in \mathcal{S}$ telle que $\chi(0) = 1$, alors $\chi(\varepsilon \cdot)u \rightarrow u$ dans $\mathcal{S}'$ lorsque ε tend vers 0 car $\chi(\varepsilon \cdot)\varphi \rightarrow \varphi$ dans $\mathcal{S}$. En effet, on peut reprendre la preuve faite pour la proposition 4.4.

REMARQUE 4.7. Il est clair que $L^p \subset \mathcal{S}'$ pour tout $p \geq 1$. Par contre $L_{\text{loc}}^1 \not\subset \mathcal{S}'$, puisque par exemple $e^{x^2} \notin \mathcal{S}'$.

L'application qui à une distribution tempérée fait correspondre sa restriction à $\mathcal{C}_0^\infty$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) &\rightarrow \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \\ u &\rightarrow u|_{\mathcal{C}_0^\infty} \end{aligned}$$

est linéaire et injective en vertu de la proposition 4.4. En identifiant $\mathcal{S}'$ et son image par cette injection, on peut donc considérer $\mathcal{S}'$ comme un sous espace de

$\mathcal{D}'$. Plus précisément, comme le nombre de dérivées consommées dans la définition d'une distribution tempérée est fixe, une distribution tempérée est d'ordre fini. De plus comme la classe de Schwartz $\mathcal{S}$ est stable par les opérations usuelles — dérivation, translation, multiplication par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ — l'espace des distributions tempérées est stable par ces opérations.

En outre, rappelons qu'une distribution à support compact peut être prolongée à $\mathcal{C}^\infty$ par la formule

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \langle u, \chi \varphi \rangle$$

où χ est une fonction de troncature $\mathcal{C}_0^\infty$ égale à 1 sur un ouvert contenant le support de u . L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n) &\rightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \\ u &\rightarrow \tilde{u} \end{aligned}$$

est une injection qui permet d'identifier $\mathcal{E}'$ à un sous-espace de $\mathcal{S}'$. Ainsi les divers espaces de distribution se hiérarchisent de la manière suivante :

PROPOSITION 4.8. *On a la série d'inclusions*

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'_F \subset \mathcal{D}'$$

où $\mathcal{D}'_F$ désigne l'ensemble des distributions d'ordre fini.

DÉFINITION 4.9. *Soit $u \in \mathcal{S}'$ une distribution tempérée, la transformée de Fourier de u est la distribution $\hat{u}$ définie par*

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

EXEMPLE 3. $\hat{\delta} = 1, \hat{1} = (2\pi)^n \delta$

La transformée de Fourier est continue sur $\mathcal{S}'$ au sens que si $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $\mathcal{S}$ alors $\hat{u}_\varepsilon \rightarrow \hat{u}$ dans $\mathcal{S}'$.

REMARQUE 4.10. Dans le cas où $u \in L^p \subset \mathcal{S}'$ avec $1 \leq p \leq \infty$, on peut calculer $\hat{u}$ par un passage à la limite dans $\mathcal{S}'$. Soit $\chi \in \mathcal{S}$, alors $\chi(\varepsilon \cdot)u \rightarrow u$ dans $\mathcal{S}'$ d'après la remarque 4.6, et $\chi(\varepsilon \cdot)u \in L^1$ donc on peut calculer

$$\hat{u}(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \chi(\varepsilon x) e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx \quad (\text{dans } \mathcal{S}').$$

Il existe une autre manière de prolonger la transformée de Fourier d'une fonction L^p pour $1 \leq p \leq 2$: l'interpolation — on arrive à prolonger la transformée de Fourier en une application bornée

$$\mathcal{F} : L^p \rightarrow L^{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad p \leq 2.$$

EXEMPLE 4. $\hat{H} = \frac{1}{i} \frac{1}{\xi - i0}$

En effet soit χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[-1, +\infty]$, égale à 1 sur $\mathbf{R}^+$ alors $\chi(x)e^{-x} \in \mathcal{S}$ et en appliquant la remarque précédente on a

$$\hat{H} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\xi - i\varepsilon}.$$

5. Propriétés de la transformation de Fourier

La transformation de Fourier est définie pour les distributions tempérées, il reste à étendre les propriétés satisfaites par la transformation de Fourier des fonctions L^2 aux distributions et à établir quelques propriétés simples additionnelles.

Commençons par les propriétés les plus évidentes. Soit A une matrice $n \times n$ inversible, on utilisera la notation suivante

$$\langle u \circ A, \varphi \rangle = |\det A|^{-1} \langle u, \varphi \circ A^{-1} \rangle$$

obtenue par analogie avec un changement de variable dans le cas où u est une fonction.

PROPOSITION 5.1. *Soit $u \in \mathcal{S}'$ une distribution tempérée. Alors on a*

$$(1) \widehat{x_j u} = -D_j \hat{u}, \text{ et donc } \widehat{x^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{u}$$

$$(2) \widehat{D_j u} = \xi_j \hat{u}, \text{ et donc } \widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \hat{u}$$

$$(3) \hat{\hat{u}} = (2\pi)^n \check{u}$$

$$(4) \widehat{u \circ A} = |\det A|^{-1} \hat{u} \circ {}^t A^{-1} \text{ et } \widehat{\tau_a u} = e^{-ix \cdot a} \hat{u}.$$

La troisième propriété permet donc d'affirmer que la transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ est un isomorphisme d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^n \check{\mathcal{F}}$.

PREUVE. Les quatre propriétés sont obtenues par dualité, il suffit de les vérifier sur les fonctions test. Pour les trois premières, cela a été fait dans la section 2. En ce qui concerne la quatrième, c'est un simple changement de variable

$$\widehat{\varphi \circ A} = \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(Ax) dx = |\det A| \int e^{-iy \cdot {}^t A^{-1} \xi} \varphi(y) dy$$

et pour ce qui est de la translation

$$\widehat{\tau_a \varphi} = e^{-ia \cdot \xi} \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx.$$

Ce qui achève la preuve. □

Abordons maintenant la question de la convolution. Rappelons que pour des fonctions L^2 , le produit de convolution se transforme en le produit usuel. Avec les distributions, il convient d'être prudent dans la mesure où le produit de convolution n'a été défini que dans certains cas, et le produit de deux distributions n'a pas été défini ! Commençons par un cas simple.

THÉORÈME 5.2. Soient $u \in \mathcal{S}'$ et $\varphi \in \mathcal{S}$ une distributions tempérée et une fonction de la classe de Schwartz. Alors on peut définir la convolée³ $u * v$ et on a

$$\widehat{u * \varphi} = \hat{\varphi} \hat{u}.$$

PREUVE. Si $u \in \mathcal{S}'$ et $\varphi \in \mathcal{S}$ alors $\langle u * \varphi, \psi \rangle = \langle \check{u}, \varphi * \check{\psi} \rangle$ (cette formule a un sens car $\mathcal{S}$ est stable par convolution) définit une distribution tempérée dont la restriction à $\mathcal{C}_0^\infty$ coïncide avec la convolution $u * \varphi$ définie dans $\mathcal{D}'$ lorsque $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ ou lorsque $u \in \mathcal{E}'$. En outre, on a

$$\langle \widehat{u * \varphi}, \psi \rangle = \langle \check{u}, \varphi * \check{\psi} \rangle = \langle u, \widehat{\varphi \psi} \rangle = \langle \hat{u} \hat{\varphi}, \psi \rangle.$$

□

THÉORÈME 5.3. Soit $u \in \mathcal{E}'$ une distribution à support compact, alors la transformée de Fourier de u est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à croissance lente donnée par

$$\hat{u}(\xi) = \langle u, e^{-ix \cdot \xi} \rangle.$$

PREUVE. Soit $u \in \mathcal{E}'$, d'après le théorème d'intégration sous le signe crochet, on a

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle = \int \varphi(x) \langle u, e^{-ix \cdot \xi} \rangle dx$$

ce qui implique que $\hat{u}$ est la fonction $\langle u, e^{-ix \cdot \xi} \rangle$ à croissance lente :

$$|\langle u, e^{-ix \cdot \xi} \rangle| \leq C_k \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \text{supp } u} |\partial_x^\alpha (e^{-ix \cdot \xi})| \leq C_k |\xi|^k.$$

Cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ par le théorème de dérivation sous le signe crochet et $D^\alpha \hat{u} = (-1)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha u}$. □

Il existe un résultat avec des majorations plus précises et une réciproque au précédent résultat, c'est le théorème de Paley-Wiener-Schwartz. Par ailleurs, une conséquence du résultat précédent est un moyen de calculer la transformée de Fourier.

COROLLAIRE 5.4. Soit $u \in \mathcal{S}'$ et soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty$ telle que $\chi(0) = 1$, la transformée de Fourier de u peut être calculée par la limite

$$\hat{u} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle u, \chi(\varepsilon x) e^{-ix \cdot \xi} \rangle \quad \text{dans } \mathcal{S}'.$$

PREUVE. On a montré que $\chi(\varepsilon \cdot) \varphi \rightarrow \varphi$ dans $\mathcal{S}$ dans la preuve de la proposition 4.4, ce qui implique que $\chi(\varepsilon \cdot) u \rightarrow u$ dans $\mathcal{S}'$ et donc que $\widehat{\chi(\varepsilon \cdot) u} \rightarrow \hat{u}$. De plus $\chi(\varepsilon \cdot) u \in \mathcal{E}'$, ce qui donne la formule désirée. □

THÉORÈME 5.5. Soient $u \in \mathcal{S}'$ et $v \in \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$ deux distributions tempérées. Alors $u * v$ est une distribution tempérée et on a

$$\widehat{u * v} = \hat{u} \hat{v}.$$

³Sont supposées définies et connues la convolée d'une fonction de $\mathcal{C}_0^\infty$ et d'une distribution, et plus généralement d'une distribution de $\mathcal{E}'$ et d'une distribution de $\mathcal{D}'$.

PREUVE. Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty$ égale à 1 sur un ouvert contenant le support de v . La formule

$$\langle u * v, \varphi \rangle = \langle u_x, \langle v_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle u_x, \langle v_y, \chi(y) \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

permet de définir une distribution tempérée dont la restriction à $\mathcal{C}_0^\infty$ coïncide avec $u * v$. En effet,

$$\begin{aligned} |x^\alpha \partial^\beta \langle v, \chi \varphi(\cdot + x) \rangle| &= |\langle v, x^\alpha \chi \partial^\beta \varphi(\cdot + x) \rangle| \\ &\leq C \sum_{|\gamma| \leq k} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \sup_{y \in \text{supp } \chi} (|x+y| + |y|)^{|\alpha|} |\partial^{\beta+\gamma} \varphi(x+y)| \end{aligned}$$

implique que $\langle v, \varphi(\cdot + x) \rangle$ est une fonction de la classe de Schwartz (les puissances de $|y|$ sont bornées car $y \in \text{supp } \chi$ et les puissances de $|x+y|$ sont absorbées grâce au fait que $\varphi \in \mathcal{S}$) et donc que le crochet de dualité est bien défini.

On peut alors calculer

$$\langle \widehat{u * v}, \varphi \rangle = \langle u_x, \langle v_y, \hat{\varphi}(x+y) \rangle \rangle = \langle u_x, \langle \hat{v}_\eta, e^{-ix \cdot \eta} \varphi(\eta) \rangle \rangle$$

or $v \in \mathcal{E}'$ implique que $\hat{v}$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ donc

$$\langle \hat{v}_\eta, e^{-ix \cdot \eta} \varphi(\eta) \rangle = \int e^{-ix \cdot \eta} \hat{v}(\eta) \varphi(\eta) d\eta = \widehat{v \hat{\varphi}}(x) \in \mathcal{S}.$$

Ceci donne donc

$$\langle \widehat{u * v}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{v \hat{\varphi}} \rangle = \langle \hat{u} \hat{v}, \varphi \rangle$$

ce qui achève le calcul. □

6. Un exemple : la formule de Poisson

Soit $a \in \mathbf{R}$, on considère la distribution tempérée suivante

$$D_a = \sum_{\nu \in \mathbf{Z}^n} \delta_{a\nu}.$$

Le noyau de Poisson est la fonction 2π -périodique suivante

$$P(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$$

elle intervient dans la recherche de fonctions harmoniques (i.e. solution de $\Delta u = 0$) de deux variables.

LEMME 6.1. *Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ alors*

$$(2\pi)^{-n} \int_{[-\pi, \pi]^n} \varphi(\omega) P(r, \omega_1) \cdots P(r, \omega_n) d\omega \rightarrow \varphi(0)$$

lorsque r tend vers 1.

PREUVE. On commence par remarquer que⁴

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta) d\theta = 1$$

par conséquent, si $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, la formule de Taylor permet d'écrire $\psi(\theta) = \psi(0) + \psi'(0)\theta + \theta^2\chi(\theta)$ avec χ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et en utilisant la parité de $P(r, \theta)$ en θ on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta) \psi(\theta) d\theta - \psi(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi(\theta) \theta^2 P(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi(\theta) \frac{(1-r^2)\theta^2}{(1-r)^2 + 4\sin^2 \theta/2} d\theta. \end{aligned}$$

Ce qui donne la majoration

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta) \psi(\theta) d\theta - \psi(0) \right| \leq 4|1-r^2| \sup_{[-\pi, \pi]} |\chi| \int_0^\pi \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^{-2} d\theta$$

et prouve le résultat en dimension $n = 1$. Dans le cas de la dimension quelconque, le résultat reste vrai pour des fonctions de la forme $\varphi = \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n$, en particulier pour $e^{-i\omega \cdot k}$. Dans le cas général, lorsque $\varphi \in \mathcal{S}$, le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{[-\pi, \pi]^n} \varphi(\omega) P(r, \omega_1) \cdots P(r, \omega_n) d\omega \\ = (2\pi)^{-n} \int \hat{\varphi}(k) \underbrace{\int_{[-\pi, \pi]^n} e^{ik \cdot \omega} P(r, \omega_1) \cdots P(r, \omega_n) d\omega}_{\longrightarrow (2\pi)^{-n} \text{ lorsque } r \rightarrow 1} dk \end{aligned}$$

ce qui d'après le théorème de convergence dominée, tend vers

$$\int \hat{\varphi}(k) dk = (2\pi)^n \varphi(0)$$

et le preuve est achevée. $\square$

THÉORÈME 6.2 (Formule de sommation de Poisson). *On a $\hat{D}_1 = (2\pi)^n D_{2\pi}$, ce qui se traduit par la formule de sommation suivante*

$$\sum_{\nu \in \mathbf{Z}^n} \hat{\varphi}(\nu) = (2\pi)^n \sum_{\nu \in \mathbf{Z}^n} \varphi(2\pi\nu), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

⁴Rappelons qu'en utilisant le théorème des résidus, on montre que pour $a > b > 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a + b \cos \theta} d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{1}{bz^2 + 2az + b} dz = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

PREUVE. Il s'agit de calculer la distribution

$$\mathcal{P} = \sum_{\nu \in \mathbf{Z}^n} e^{-i\nu \cdot \xi}$$

pour cela, on considère la fonction

$$\mathcal{P}_\varepsilon(\xi) = \sum_{\nu \in \mathbf{Z}^n} e^{-\varepsilon q(\nu)} e^{-i\nu \cdot \xi}$$

avec $q(\nu) = \sum_{j=1}^d |\nu_j|$, qui converge vers $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{S}$ car

$$\langle \mathcal{P}_\varepsilon, \varphi \rangle = \sum_{\nu \in \mathbf{Z}^n} e^{-\varepsilon q(\nu)} \hat{\varphi}(\nu) \rightarrow \sum_{\nu \in \mathbf{Z}^n} \hat{\varphi}(\nu) = \langle \mathcal{P}, \varphi \rangle$$

lorsque ε tend vers 0 d'après le théorème de convergence dominée.

On peut calculer la fonction $\mathcal{P}_\varepsilon(\xi)$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\varepsilon(\xi) &= \prod_{j=1}^n \left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon |\nu|} e^{-i\nu \xi_j} \right) = \prod_{j=1}^n \frac{1 - e^{-2\varepsilon}}{1 - 2e^{-\varepsilon} \cos \xi_j + e^{-2\varepsilon}} \\ &= P(e^{-\varepsilon}, \xi_1) \cdots P(e^{-\varepsilon}, \xi_n) \end{aligned}$$

où $P(r, \theta)$ est le noyau de Poisson. Par conséquent si $\varphi \in \mathcal{S}$, on a

$$\int \varphi(\xi) \mathcal{P}_\varepsilon(\xi) d\xi = \sum_{\nu \in \mathbf{Z}^n} \int_{[-\pi, \pi]^n} \varphi(\xi + 2\pi\nu) \mathcal{P}_\varepsilon(\xi) d\xi.$$

Chacun des termes de cette somme est majoré par

$$\int_{[-\pi, \pi]^n} |\varphi(\xi + 2\pi\nu)| \mathcal{P}_\varepsilon(\xi) d\xi \leq \frac{1}{(\pi|\nu|)^{n+1}} \sup |\xi|^{n+1} |\varphi(\xi)| \underbrace{\int_{[-\pi, \pi]^n} \mathcal{P}_\varepsilon(\xi) d\xi}_{=(2\pi)^n}.$$

et tend vers $\varphi(2\pi\nu)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ d'après le lemme 6.1. On conclue alors avec le théorème de convergence dominée. $\square$