Quelques résultats sur l'équation des ondes

On veut étudier l'équation différentielle suivante

(Ondes) $$\partial_t^2 u - \Delta_x u = f \quad \text{sur } \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d.$$

C'est une équation hyperbolique dont le symbole est la forme quadratique $-\tau^2 + |\xi|^2$ de signature $(1, d)$. Cette note est organisée de la manière suivante :

Table des matières

1. Préliminaires

Définition 1. *Une solution fondamentale de l'équation des ondes est une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{d+1})$ solution de*

(1) $$\partial_t^2 E - \Delta_x E = \delta.$$

On cherche à déterminer une solution fondamentale de l'équation des ondes : en passant à la transformée de Fourier dans la variable spatiale, on obtient l'équation différentielle ordinaire

$$\partial_t^2 \hat{E} + |\xi|^2 \hat{E} = \delta(t)$$

dont l'équation homogène associée a pour base de solutions $\cos(t|\xi|)$ et $\sin(t|\xi|)$. On utilise alors une variation des constantes

$$a(t)\cos(t|\xi|) + b(t)\sin(t|\xi|)$$

avec la condition

$$a'(t)\cos(t|\xi) + b'(t)\sin(t|\xi|) = 0$$

ce qui donne l'autre équation

$$-a'(t)|\xi|\sin(t|\xi|) + b'(t)|\xi|\cos(t|\xi|) = \delta(t)$$

et donc

$$a'(t) = -\delta(t)\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} = 0, \quad b'(t) = \delta(t)\frac{\cos(t|\xi|)}{|\xi|} = \frac{\delta(t)}{|\xi|}.$$

Finalement on peut choisir $a(t) = 0$ et $b(t) = H(t)$ soit

$$\hat{E}_+ = H(t)\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}$$

cette expression représente une distribution tempérée. De même, la distribution $E_- = \check{E}_+$ est également une solution fondamentale de l'équation des ondes. On vient donc de démontrer le résultat intermédiaire suivant :

Théorème 2. *Une solution fondamentale de l'équation des ondes est la distribution tempérée donnée par la transformée de Fourier inverse dans la variable* $x \in \mathbf{R}^d$

$$E_+ = H(t)\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\Big) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d).$$

Pour déterminer la solution fondamentale de l'équation des ondes, il s'agit donc de faire le calcul de la transformée de Fourier précédente. Nous nous limiterons aux cas de dimension $d = 1$ et $d = 2$ où le résultat est une fonction L^1_{loc}, et au cas de la dimension $d = 3$, où l'on obtient une mesure. En dimension supérieure, on obtient également des distributions.

2. Solution fondamentale en dimension $d = 1$

En dimension $d = 1$, on a

$$\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} = \frac{\sin(t\xi)}{\xi}.$$

Théorème 3. *Une solution fondamentale de l'équation des ondes en dimension (spatiale)* $d = 2$ *est donnée par*

$$E_+(t,x) = \frac{1}{2}H(t-|x|).$$

Remarquons que E_+ est une fonction L^1_{loc}. De plus, la distribution

$$E_- = \check{E} = \frac{1}{2}\check{H}(t+|x|)$$

est également une solution fondamentale, chacune des deux solutions fondamentales E_+ et E_- sont supportées respectivement dans le demi cône $t > |x|$ et $t < -|x|$.

Preuve. Rappelons que[1]

$$\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\sin(\xi)}{\xi}\Big) = \frac{1}{2}1_{[-1,1]}(x)$$

par conséquent grâce à un changement de variable

$$E_+(t,x) = H(t)\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\sin(t\xi)}{\xi}\Big) = \frac{1}{2}H(t)1_{[-t,t]}(x).$$

Ce qui donne le résultat. □

3. Solution fondamentale en dimension $d = 2$

Commençons par approcher la solution fondamentale en introduisant un facteur de convergence dans la transformée de Fourier inverse.

Lemme 4. *La transformée de Fourier inverse de la fonction* $L^1 \cap L^2$ $\xi \to e^{-\varepsilon|\xi|}\sin(t|\xi|)/|\xi|$ *en dimension* $d = 2$ *est donnée par*

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{t^2 - |x|^2}}H(t - |x|) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

si ε *est assez petit.*

Preuve. Calculons la transformée de Fourier inverse

$$\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}e^{-\varepsilon|\xi|}\Big) = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{S}^1} e^{-\varepsilon r}\sin(rt)e^{irx\cdot\omega}\,\frac{d\omega dr}{4\pi^2} \tag{2}$$

en passant en coordonnées polaires. L'intégrale sur le cercle représente la transformée de Fourier de la mesure sur le cercle (qui est une distribution à support compact) au point $-rx$; cette transformée est une fonction radiale[2]

$$\widehat{d\omega}(-rx) = \int_{\mathbf{S}^1} e^{irx\cdot\omega}\,d\omega = \int_0^{2\pi} e^{ir|x|\cos\theta}\,d\theta.$$

---

[1] En effet, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r}\frac{\sin x}{x}e^{ix\,\xi}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^r\frac{\sin x}{x}\cos(x\,\xi)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{r(\xi-1)}^{r(\xi+1)}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

tend vers $\frac{1}{2}1_{[-1,1]}(\xi)$ lorsque $r \to +\infty$.

[2] On peut écrire x sous la forme $x = |x|Ae_1$ où $e_1 = (1,0)$ et A est une rotation du plan (dépendant du vecteur x, ce qui donne $x\cdot\omega = |x|e_1\cdot{}^tA\omega$, et en faisant le changement de variable $\omega \to {}^tA\omega$ qui ne modifie ni la mesure ni le cercle, invariant par rotation, on obtient l'intégrale

$$\int_{\mathbf{S}^1} e^{ir|x|\cdot\omega_1}\,d\omega = \int_0^{\pi} e^{ir|x|\cos\theta}\,d\theta.$$

Ainsi la transformée de Fourier inverse (2) est-elle égale à

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\varepsilon r}\sin(rt)e^{ir|x|\cos\theta}\,d\theta\,dr$$

ou encore après quelques calculs

$$\frac{1}{4\pi^2}\,\mathrm{Im}\int_0^{2\pi}\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon r}e^{ir(t+|x|\cos\theta)}\,dr}_{=-\frac{1}{i}\frac{1}{t+|x|\cos\theta+i\varepsilon}}\;d\theta$$

en tenant compte de (3). Ceci termine le calcul si on utilise le lemme qui suit (avec $a = t$ et $b = |x|$). $\square$

Lemme 5. *Soient $a, b > 0$ et si $\varepsilon > 0$ est assez petit alors on a*

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta+i\varepsilon}\,d\theta = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} + \mathcal{O}(\varepsilon) & \textit{lorsque } a > b > 0 \\ \dfrac{2\pi}{i\sqrt{b^2-a^2}} + \mathcal{O}(\varepsilon) & \textit{lorsque } 0 < a < b \end{cases}.$$

Preuve. Cette intégrale peut être écrite comme une intégrale curviligne[3]

$$\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{bz^2+2az+b+i\varepsilon}$$

que l'on peut calculer à l'aide du théorème des résidus. Les pôles de la fraction sont donnés par

$$z_\pm = -\frac{a}{b} \pm \frac{\sqrt{a^2-b^2-i\varepsilon b}}{b}$$

où la branche considérée de la racine est par exemple celle définie en dehors de la demi-droite $\theta = \pi/4$ De plus, le résidu de la fraction aux pôles est donnée par

$$\operatorname*{res}_{z=z_\pm}\frac{1}{bz^2+2az+b+i\varepsilon} = \pm\frac{b}{z_+-z_-} = \pm\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2-i\varepsilon b}}.$$

Enfin, remarquons que

$$|z_+z_-|^2 = \left|1+i\frac{\varepsilon}{b}\right|^2 = 1+\frac{\varepsilon^2}{b^2} > 1$$

[3]La preuve de ce lemme est parfaitement hors programme puisque la théorie des fonctions holomorphes n'a pas été étudiée en MACS. Elle est donnée à titre purement indicatif.

ce qui implique que les deux pôles ne peuvent être à l'intérieur du disque unité. En outre, on a

$$z_+ = -\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} \underbrace{\left(1 - i\varepsilon\frac{b}{a^2-b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}_{=1+i\frac{\varepsilon b}{2(a^2-b^2)}+\mathcal{O}(\varepsilon^2)}.$$

Lorsque $a > b > 0$, on en déduit

$$|z_+|^2 = \underbrace{\left(\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)^2}_{0\leq\cdots<1} + \mathcal{O}(\varepsilon) < 1$$

et lorsque $0 < a < b$

$$|z_+|^2 = \underbrace{\left(\frac{a}{b} - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{b^2-a^2}}\right)^2}_{0\leq\cdots<\frac{a^2}{b^2}} + 1 - \frac{a^2}{b^2} < 1$$

si l'on suppose ε assez petit.

Par conséquent le pôle z_+ est à l'intérieur du disque unité $|z_+| < 1$ et le pôle z_- à l'extérieur $|z_-| > 1$, seul le résidu au pôle z_+ apporte une contribution à l'intégrale curviligne. Le théorème des résidus donne donc

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{bz^2 + 2az + b + i\varepsilon} = \frac{\pi i}{\sqrt{a^2 - b^2 - i\varepsilon b}}.$$

Dans le cas $0 < a < b$, cela permet d'affirmer que

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + b\cos\theta + i\varepsilon}\, d\theta = \frac{2\pi}{i\sqrt{b^2-a^2}}\left(1 - i\varepsilon\frac{b}{a^2-b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ce qui donne le résultat après un développement limité. De même dans le cas $0 < b < a$, cela donne

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + b\cos\theta + i\varepsilon}\, d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(1 + i\varepsilon\frac{b}{b^2-a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ce qui donne le résultat après un développement limité. $\square$

Théorème 6. *Une solution fondamentale de l'équation des ondes en dimension (spatiale) $d = 2$ est donnée par*

$$E_+(t,x) = \frac{1}{2\pi} H(t - |x|) \frac{1}{\sqrt{t^2 - |x|^2}}.$$

Remarquons que E_+ est une fonction L^1_{loc} puisque

$$\iint_{|t|<a} |E_+(t,x)|\, dt\, dx = \int_0^a \int_0^t \frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}\, dr\, dt = \int_0^a t\, dt < +\infty$$

Preuve. Il est clair que

$$\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}e^{-\varepsilon|\xi|} \to \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{d+1})$$

lorsque ε tend vers 0, donc il suffit de calculer

$$E_+ = \lim_{\varepsilon\to 0} H(t)\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}e^{-\varepsilon|\xi|}\Big) \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{d+1}).$$

Or pour toute fonction dans la classe de Schwartz, on a

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{t>|x|}\Big(\frac{1}{\sqrt{t^2-|x|^2}} + \mathcal{O}(\varepsilon)\Big)\varphi(t,x)\,dt\,dx \\ \to \frac{1}{2\pi}\iint_{t>|x|}\frac{1}{\sqrt{t^2-|x|^2}}\varphi(t,x)\,dt\,dx$$

ce qui termine la preuve. □

4. Solution fondamentale en dimension $d = 3$

On rappelle le calcul de la transformée de Fourier de la Gaussienne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-it\tau}\,dt = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\tau^2}{2}}. \tag{3}$$

Donnons l'analogue du lemme 4 qui permet de calculer une approximation de la solution fondamentale.

Lemme 7. *La transformée de Fourier inverse de la fonction $L^1 \cap L^2$ $\xi \to e^{-\varepsilon|\xi|^2/2}\sin(t|\xi|)/|\xi|$ en dimension $d = 3$ est donnée par*

$$\frac{1}{4\pi|x|}\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\big(e^{-\frac{(t+|x|)^2}{2\varepsilon}} - e^{-\frac{(t-|x|)^2}{2\varepsilon}}\big)$$

Preuve. Comme auparavant, on passe en coordonnées polaires

$$\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}e^{-\varepsilon\frac{|\xi|^2}{2}}\Big) = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{S^2}} e^{-\varepsilon\frac{r^2}{2}}\sin(rt)e^{irx\cdot\omega}\,\frac{d\omega dr}{8\pi^3} \tag{4}$$

et l'intégrale sur la sphère représente la transformée de Fourier de la mesure sur la sphère que l'on peut calculer explicitement

$$\widehat{d\omega}(-rx) = 2\pi\int_0^{\pi} e^{ir|x|\cos\theta}\sin\theta\,d\theta = 2\pi\,\frac{\sin(r|x|)}{r|x|}.$$

Aussi la transformée de Fourier inverse (4) est-elle égale à

$$\frac{1}{4\pi^2|x|}\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon\frac{r^2}{2}}\sin(rt)\sin(r|x|)\,dr$$

ou encore puisque le produit des deux sinus est égal à $\frac{1}{2}(\sin(rt+r|x|)+\sin(rt-r|x|))$

$$\frac{1}{8\pi^2|x|}\mathrm{Im}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon\frac{r^2}{2}}e^{-ir(t-|x|)}\,dr+\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon\frac{r^2}{2}}e^{-ir(t+|x|)}\,dr\Big)$$

ce qui donne le résultat désiré en tenant compte de (3). □

Théorème 8. *Une solution fondamentale de l'équation des ondes en dimension (spatiale) $d=3$ est donnée par la distribution*

$$\langle E_+,\varphi\rangle=\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{S}^2} t\varphi(t,t\omega)\,d\omega\,dt.$$

Preuve. Puisque

$$\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}e^{-\varepsilon\frac{|\xi|^2}{2}}\to\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\quad\text{dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{d+1})$$

lorsque ε tend vers 0, donc il suffit de calculer

$$E_+=\lim_{\varepsilon\to 0}H(t)\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}e^{-\varepsilon\frac{|\xi|^2}{2}}\Big)\quad\text{dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{d+1}).$$

Or on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\int\int_0^{+\infty}&\varphi(t,x)\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\big(e^{-\frac{(t+|x|)^2}{2\varepsilon}}-e^{-\frac{(t-|x|)^2}{2\varepsilon}}\big)\,dt\,\frac{dx}{|x|}\\&=\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_{\mathcal{S}^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t,r\omega)\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}e^{-\frac{(t+r)^2}{2\varepsilon}}\,r dr\,d\omega\,dt\\&\to\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_{\mathcal{S}^2}t\varphi(t,t\omega)\,d\omega\,dt\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

5. Quelques propriétés de l'équation des ondes

Remarquons que la résolution de l'équation des ondes avec données initiales

$$\text{(Ondes)}\qquad\begin{cases}\partial_t^2u-\Delta_xu=f & \text{sur } \mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\\ u(0,x)=u_0\\ \partial_tu(0,x)=u_1(x)\end{cases}$$

se décompose en la résolution des deux équations, l'une homogène, l'autre à données initiales nulles

$$(5)\qquad\begin{cases}\partial_t^2v-\Delta_xv=0\\ v(0,x)=u_0\\ \partial_tv(0,x)=u_1(x)\end{cases}\qquad\begin{cases}\partial_t^2w-\Delta_xw=f\\ w(0,x)=0\\ \partial_tw(0,x)=0\end{cases}$$

puisque la solution des ondes est donnée par $u = v+w$. Cette décomposition qui vient de la linéarité de l'équation peut s'avérer utile.

De plus, pour résoudre équation homogène, il suffit de savoir la résoudre lorsque $u_0 = 0$, en effet si v_j est solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 v_j - \Delta_x v_j = 0 \\ v_j(0,x) = 0 \\ \partial_t v_j(0,x) = u_j(x) \end{cases}$$

alors $v = \partial_t v_1 + v_2$ est solution de l'équation des ondes homogène et de plus $v(0,x) = \partial_t v_1(0,x) = u_1(x)$ et $\partial_t v(0,x) = -\Delta_x v_1(0,x) + \partial_t v_2(0,x) = u_2(x)$. De même pour résoudre l'équation inhomogène, il suffit de résoudre

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{w} - \Delta_x \tilde{w} = 0 \\ \tilde{w}(0,s,x) = 0 \\ \partial_t \tilde{w}(0,s,x) = f(s,x) \end{cases}$$

et la solution correspondant à l'équation inhomogène est donnée par la formule de Duhamel

$$w(t,x) = \int_0^t \tilde{w}(t-s,s,x)\,ds.$$

Ainsi peut-on se ramener à la résolution de l'équation homogène avec données initiales $u_0 = 0$ et u_1.

Revenons à l'équation des ondes générale. En reprenant les calculs faits dans la section préliminaire (passage à la transformée de Fourier dans la variable spatiale, variation de la double constante dans l'équation ordinaire obtenue) on voit que

$$\int_0^t \frac{\sin((t-s)|\xi|)}{|\xi|}\hat{f}(s,\xi)\,ds + \cos(t|\xi|)\hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{u}_1(\xi)$$

est solution de l'équation ordinaire obtenue à partir de l'équation des ondes en passant à la transformée de Fourier. Par conséquent si on note $E = E_+ - E_- = \mathcal{F}^{-1}(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|})$, on a

$$u = \int_0^t E(t-s,\cdot) * f(s,\cdot)\,ds + \partial_t E(t,\cdot) * u_0 + E(t,\cdot) * u_1$$

Les solutions fondamentales calculées jusqu'à présent vérifient la propriété

$$\operatorname{supp} E_\pm \subset \{(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d : |t| > |x|\} = \Gamma$$

ceci implique le principe de Huygens.

Théorème 9 (Principe de Huygens)**.** *Si u est solution de l'équation des ondes avec données initiales $u_0, u_1 \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ supportées dans la boule $B(0,r)$ alors*

$$\operatorname{supp} u \subset B(0, r + |t|).$$

Autrement dit, la propagation des ondes se fait à vitesse finie.

On peut améliorer ce résultat en dimension impaire : c'est le principe de Huygens fort.

L'énergie d'une solution $u(t,x)$ dans $H^2(\mathbf{R}^{d+1})$ (ou $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}; H^1(\mathbf{R}^d))$) de l'équation des ondes homogène est conservée : on définit l'énergie comme étant la quantité

$$E[u](t) = \int |\nabla_{(t,x)} u(t,x)|^2 \, dx.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E[u](t) &= 2\mathrm{Re}\Big(\int \partial_t^2 u \, \overline{\partial_t u} \, dx + \int \nabla u \cdot \overline{\nabla \partial_t u} \, dx \Big) \\ &= 2\mathrm{Re}\Big(\int (\partial_t^2 u - \Delta_x u) \, \overline{\partial_t u} \, dx \Big) = 0. \end{aligned}$$

Théorème 10 (Conservation de l'énergie)**.** *Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}; H^1(\mathbf{R}^d))$ une solution de l'équation des ondes homogène. Alors l'énergie $E[u](t)$ est une fonction constante du temps.*