CHAPITRE 2

Espaces de Sobolev

1. Introduction

Le cadre naturel à la résolution d'équations aux dérivées partielles est celui des espaces de Sobolev, espaces de fonctions L^2 (ou plus généralement L^p) dont les dérivées sont elles-mêmes L^2.

Ces espaces s'avèrent particulièrement adéquats car ils traitent de la régularité des fonctions (ce qui semblent être le minimum que l'on puisse exiger d'espaces où sont censées se trouver les solutions d'une équation différentielle) et ils sont complets. De plus, ils offrent, dans le cas des espaces H^s la structure d'un espace Hilbertien, et sont le cadre idéal pour l'utilisation de méthodes d'analyse fonctionnelle. Ils sont également parfaitement adaptés à l'obtention d'inégalités *a priori* (des estimations faisant intervenir l'équation différentielle sans aucun *a priori* sur l'existence de solutions) nécessaires à la démonstration de l'existence (ou l'unicité) de solutions d'une équation via des méthodes abstraites (par exemple des théorèmes de points fixes, ou le théorème de Hahn-Banach).

Ce chapitre est un chapitre introductif à la théorie des espaces de Sobolev. On se restreint aux espaces de Sobolev bâtis sur l'espace L^2, on prouve l'invariance de ces espaces par difféomorphisme et on énonce le théorème de trace. On ne parle pas des injections de Sobolev, qui permettent d'injecter les espaces de Sobolev dans d'autres espaces de fonctions.

2. Définitions

Définition 2.1. *Soit $k \in \mathbf{N}$, l'espace $H^k(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions L^2 telles que*

$$\partial^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq k$$

la dérivation étant entendue au sens des distributions. Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^2.$$

Remarque 2.2. Il existe des espaces de Sobolev bâtis sur les espaces L^p plutôt que L^2

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq k\}.$$

On perd cependant la structure hermitienne (cf. ci-dessous). Ces espaces sont utiles dans l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires, mais dans ce cours nous nous contenterons des espaces $H^s = W^{s,2}$.

Exemple 5. $H(x)x \in H^1(-1,1)$ car $(H(x)x)' = x\delta + H(x) = H(x) \in L^2(-1,1)$.

Théorème 2.3. *$H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit hermitien*

$$(u,v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int \partial^\alpha u(x)\, \overline{\partial^\alpha v(x)}\, dx.$$

Preuve. Il est facile de vérifier que le produit défini est un produit hermitien, il s'agit donc de montrer que $H^k(\Omega)$ est complet. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy de $H^k(\Omega)$. En particulier, les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(\partial^\alpha u_n)_{n\geq 0}$ sont des suites de Cauchy de $L^2(\Omega)$ donc convergent dans L^2 respectivement vers $u \in L^2$ et $u_\alpha \in L^2$. Comme les dérivées $\partial^\alpha u_n$ convergent vers $\partial^\alpha u$ dans $D'(\Omega)$, on a forcément $u_\alpha = \partial^\alpha u$. Par conséquent $u \in H^k(\Omega)$ et u est limite de $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $H^k(\Omega)$. $\square$

Dans le cas où $\Omega = \mathbf{R}$ on a une caractérisation des espaces de Sobolev en terme de transformée de Fourier. Il suffit de constater le résultat suivant :

Lemme 2.4. *Dans le cas $\Omega = \mathbf{R}^n$, on a équivalence des normes*

$$\|u\|_{H^k} \simeq \Big(\int (1+|\xi|^2)^k |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi \Big).$$

Preuve. En développant

$$\int (1+|\xi|^2)^k |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi = \sum_{|\alpha|+j=k} \frac{k!}{\alpha!\, j!} \int |\xi^\alpha \hat{u}(\xi)|^2\, d\xi$$

on obtient l'équivalence des normes. $\square$

Dans la norme de droite, il n'est pas nécessaire que le nombre k soit un entier naturel pour que l'expression ait un sens. Cela mène à la définition des espaces $H^s(\mathbf{R})$ pour $s \in \mathbf{R}$.

Définition 2.5. *Soit $s \in \mathbf{R}$, l'espace $H^s(\mathbf{R}^n)$ est l'ensemble des distributions $u \in \mathcal{S}'$ telles que*

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbf{R}^n).$$

Cet espace est muni de la norme[1]

$$\|u\|_{H^s} = \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}\|_{L^2}.$$

C'est évidemment un espace de Hilbert.

D'un premier abord, cette généralisation peut sembler excessive mais nous verrons qu'il existe une différence d'une demi dérivée entre une fonction et sa restriction sur une hypersurface, la notion de dérivée non entière a son importance.

[1]Cet abus de notation est justifié par le lemme 2.4.

Remarque 2.6. Les espaces de Sobolev forment une chaine décroissante d'espaces

$$\cdots \supset H^{-1} \supset L^2 \supset H^1 \supset \cdots .$$

Lemme 2.7. *$\delta_a \in H^s$ pour tout $s < -n/2$. Plus généralement, si $u \in \mathcal{E}'$ est une distribution d'ordre k alors $u \in H^s$ pour tout $s < -n/2 - k$.*

Preuve. La masse de Dirac appartient à l'espace H^s si et seulement si

$$\int (1 + |\xi|^2)^s \, d\xi < +\infty$$

i.e. si $s < -n/2$. Soit $u \in \mathcal{E}'$ d'ordre k, alors $\hat{u}$ est une fonction à croissance lente

$$|\hat{u}(\xi)| = |\langle u, e^{-ix\cdot\xi}\rangle| \leq C_k |\xi|^k$$

donc $(1 + |\xi|^2)^{-k/2-n/4-t/2}\hat{u} \in L^2$ pour $t > 0$. $\square$

Voyons l'effet de la dérivation puis de la multiplication par une fonction de la classe de Schwartz sur l'espace H^s.

Lemme 2.8. *Si $u \in H^s$ alors $\partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}$*

Preuve. C'est une conséquence de l'inégalité $|\xi^\alpha|^2 \leq (1 + |\xi|^2)^{|\alpha|}$. $\square$

Lemme 2.9. *Soit $u \in H^s$, soit $\varphi \in \mathcal{S}$ alors $\varphi u \in H^s$.*

Preuve. On a $\widehat{\varphi u} = \hat{\varphi} * \hat{u}$, par conséquent

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq \int (1 + |\eta|^2)^{-\frac{s}{2}} |\hat{\varphi}(\xi - \eta)| (1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{u}(\eta)| \, d\eta$$

Or on a l'inégalité

$$(1 + |\zeta|^2)^{1/2} \leq \sqrt{2}(1 + |\tau|^2 + |\zeta - \tau|^2)^{1/2} \leq \sqrt{2}(1 + |\tau|^2)^{1/2}(1 + |\zeta - \tau|^2)^{1/2}$$

que l'on applique à $\zeta = \eta$ et $\tau = \xi$ si $s \leq 0$ et à $\zeta = \xi$ et $\tau = \eta$ si $s > O$ pour obtenir le fait que $(1 + |\eta|^2)^{s/2} \leq C_s(1 + |\xi|^2)^{-s/2}(1 + |\xi - \eta|^2)^{|s|/2}$. Ceci implique par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(1 + |\xi|^2)^s |\widehat{\varphi u}(\xi)|^2 \leq$$
$$C_s \|(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{\varphi}\|_{L^1}^2 \int (1 + |\xi - \eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\xi - \eta)|^2 (1 + |\eta|^2)^s |\hat{u}(\eta)|^2 \, d\eta$$

ce qui donne le résultat attendu une fois cette dernière inégalité intégrée. $\square$

Le lemme précédant permet de donner un caractère local à la régularité H^s : en effet $u \in H^s$ implique que pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $\varphi u \in H^s$ pour toute fonction $\mathcal{C}_0^\infty$ supportée près du point x_0. Ceci revient à dire que $u \in H^s$ implique que u est H^s «près de tout point $x_0 \in \mathbf{R}$». Formalisons cette définition.

DÉFINITION 2.10. *On dit que $u \in \mathcal{S}'$ est H^s en $x_0 \in \mathbf{R}^n$ s'il existe une fonction $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty$ telle que $\chi u \in H^s(\mathbf{R}^n)$ et $\chi(x_0) \neq 0$. On note $H^s_{x_0}$ l'ensemble des distributions qui sont H^s en x_0.*

Le support singulier H^s est l'ensemble des points où une distribution n'est pas H^s :

$$\mathrm{suppsing}_{H^s} u = \{x_0 \in \mathbf{R}^n : u \notin H^s_{x_0}\}.$$

3. Caractérisation et invariance par difféomorphisme

On veut donner une caractérisation des espaces H^s pour s non entier en terme de dérivées.

THÉORÈME 3.1. *Soit $s \in \mathbf{R}^+ \backslash \mathbf{N}$. Soit $f \in \mathcal{S}'$: f appartient à $H^s(\mathbf{R}^n)$ si et seulement si*

$$\sum_{|\alpha| \leq [s]} \int |\partial^\alpha f(x)|^2 \, dx + \sum_{|\alpha| = [s]} \iint \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|^2}{|x-y|^{2s-2[s]+n}} \, dx \, dy < +\infty$$

PREUVE. On commence par le cas $0 < s < 1$. En faisant le changement de variable $k = x - y$ et en utilisant le théorème de Plancherel, l'intégrale double s'écrit

$$\begin{aligned}\iint \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{2s+n}} \, dx \, dy &= \iint \frac{|\hat{f}(\xi) - \widehat{\tau_{-k} f}(\xi)|^2}{|k|^{2s+n}} \, d\xi \, dk \\ &= \int |\hat{f}(\xi)|^2 \int \frac{|1 - e^{ik\cdot\xi}|^2}{|k|^{2s+n}} \, dk \, d\xi.\end{aligned}$$

L'intégrale en k est invariante par rotation donc ne dépend que de $|\xi|$: en faisant un changement de variables, on constate qu'elle vaut $|\xi|^{2s}$ modulo une constante. En passant en coordonnées polaires, on obtient donc

$$\int \frac{|1 - e^{ik\cdot\xi}|^2}{|k|^{2s-n}} \, dk = |\xi|^{2s} \underbrace{|S^{n-2}| \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{|1 - e^{ir\cos\theta}|^2}{r^{2s+1}} \, d\theta \, dr}_{=C_s > 0}.$$

Ce qui donne

$$\|f\|_{L^2}^2 + \iint \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{2s+n}} \, dx \, dy = \int (1 + C_s |\xi|^{2s}) |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi$$

et permet d'affirmer que le résultat est vrai pour $0 < s < 1$ puisque $(1 + C_s|\xi|^{2s}) \simeq (1 + |\xi|^2)^s$. Dans le cas général, il suffit de prouver

$$u \in H^s \Leftrightarrow \partial^\alpha u \in L^2 \, \forall \alpha, |\alpha| < [s] \text{ et } \partial^\alpha u \in H^{s-[s]} \, \forall \alpha, |\alpha| = [s]$$

ce qui se fait de la même manière que dans le lemme 2.4. □

Ceci caractérise les espaces de Sobolev lorsque $s \geq 0$; lorsque $s < 0$ on utilise une caractérisation par dualité.

PROPOSITION 3.2. *L'espace H^{-s} est le dual de l'espace H^s, en particulier*

$$\|u\|_{H^{-s}} = (2\pi)^{-n} \sup_{v \in H^s} \frac{|(u,v)_{L^2}|}{\|v\|_{H^s}}.$$

PREUVE. L'égalité de Parseval et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donnent

$$\frac{|(u,v)_{L^2}|}{\|v\|_{H^s}} \leq (2\pi)^n \|u\|_{H^{-s}}$$

et de plus

$$(2\pi)^n \|u\|_{H^{-s}} = \frac{(u, \mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{-s}\hat{u})_{L^2}}{\|\mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{-s}\hat{u}\|_{H^s}} \leq \sup_{v \in H^s} \frac{|(u,v)_{L^2}|}{\|v\|_{H^s}}$$

ceci donne l'inégalité annoncée et permet de prouver la dualité de H^s et H^{-s}. □

THÉORÈME 3.3. *$H^s(\mathbf{R}^n)$ est localement invariant par difféomorphisme, i.e. si $u \in H^s_{x_0}$ et si $\kappa : \Omega_{x_0} \to \Omega_{y_0}$ est un difféomorphisme (de classe $\mathcal{C}^\infty$) d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de $y_0 = \kappa(x_0)$ alors $u \circ \kappa \in H^s_{y_0}$.*

PREUVE. Soit $u \in H^s_{x_0}$, il existe $\chi \in \mathcal{C}^\infty_0$ telle que $v = \chi u \in H^s$. Remarquons que v est à support compact K. On veut prouver que $v \circ \kappa \in H^s$.

Si $s \in \mathbf{N}$, c'est clair grâce aux résultats de dérivation des fonctions composées (qui restent valables pour les distributions par dualité) et grâce au fait

$$\sup_{x \in \kappa^{-1}(K)} |\partial^\alpha \kappa(x)| < +\infty.$$

Si $s \in \mathbf{R}^+ \backslash \mathbf{N}$, on se sert du théorème 3.1 ; il suffit de constater que

$$|\kappa(x) - \kappa(y)| \leq \sup_{z \in \kappa^{-1}(K)} |\nabla \kappa(z)|\, |x-y|, \quad \forall x, y \in \kappa^{-1}(K)$$

et donc que $|x-y| \geq C|\kappa(x) - \kappa(y)|$ et de faire un changement de variable d ans la double intégrale du théorème 3.1. Ceci prouve donc le résultat pour $s \geq 0$. Par dualité, on obtient le résultat pour $s < 0$. □

Terminons cette section avec un résultat en dimension 1 indiquant qu'une fonction H^1 — à défaut d'être dérivable — est tout de même uniformément continue. Le prolongement logique de ce résultat est la déclinaison des théorémes d'injection de Sobolev qui permettent de comparer diverses formes de régularité des fonctions.

THÉORÈME 3.4. *Soit $u \in H^1(\mathbf{R})$, u est une fonction uniformément continue.*

PREUVE. Montrons tout d'abord que $u \in H^1(\mathbf{R})$ peut s'écrire de la manière suivante

$$u(x) = u_0 + \int_0^x u'(t)\, dt$$

pour presque tout $x \in \mathbf{R}$ (l'intégrale a un sens puisque u est L^2 donc L^1_{loc}). Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$, on a grâce au théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\Big\langle \Big(\int_0^x u'(t)\,dt\Big)', \varphi\Big\rangle &= -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^x u'(t)\varphi'(x)\,dt\,dx \\ &= \int_{-\infty}^0 u'(t)\int_{-\infty}^t \varphi'(x)\,dx\,dt - \int_0^{+\infty} u'(t)\int_t^{+\infty}\varphi'(x)\,dx\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)\varphi(t)\,dt = \langle u', \varphi\rangle.\end{aligned}$$

ce qui démontre la formule désirée.

On peut alors établir la majoration suivante à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_x^y |u'(t)|\,dt \leq \sqrt{|y-x|}\,\|u\|_{L^2}$$

si $y \geq x$, ce qui induit la continuité uniforme de u. □

4. Théorèmes de trace

Dans des problémes d'équations différentielles avec données au bord d'un ouvert (tel que le problème de Poisson sur le disque unité avec données sur le cercle), il est nécessaire de pouvoir donner un sens à la restriction d'une fonction sur le bord. Pour une distribution, la notion de valeur en un point, et donc la notion de restriction au bord d'un ouvert, n'a pas de sens ; il faut déterminer si l'on peut donner un sens à cette notion pour des distributions plus régulières.

Supposons que le bord de l'ouvert soit régulier, i.e. une hypersurface de classe $\mathcal{C}^\infty$. À la fin de la section précédente, nous avons vu qu'une fonction $H^1(\mathbf{R})$ est continue ; par conséquent prendre la valeur de la fonction en un point a parfaitement un sens. En revanche une fonction $H^s(\mathbf{R}^n)$, $s \geq 0$ est une fonction L^2 donc définie presque partout, et prendre sa restriction sur une hypersurface, un ensemble de mesure nulle n'a *a priori* pas de sens. L'objectif de cette section est de donner un sens à la restriction, et de déterminer la perte de régularité.

Pour commencer rappelons la notion d'hypersurface (l'analogue de la notion de surface en dimension quelconque) et de bord régulier d'un ouvert.

Définition 4.1 (Rappel). *Une hypersurface Σ de $\mathbf{R}^n$ (de classe $\mathcal{C}^\infty$) est un ensemble localement difféomorphe à l'hyperplan $\{x \in \mathbf{R}^n : x_n = 0\}$, i.e. pour tout $x_0 \in \Sigma$ il existe un voisinage $V \subset \mathbf{R}^n$ de x_0 et un difféomorphisme $\kappa : V \to V'$ tel que $\kappa(\Sigma \cap V) = \{x \in V' : x_n = 0\}$. La donnée d'un tel couple (κ, V) est appelée une carte de l'hypersurface Σ.*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, Ω a un bord régulier si pour tout $x_0 \in \partial\Omega$ il existe un voisinage $V \subset \mathbf{R}^n$ de x_0 et un difféomorphisme $\kappa : V \to V'$ tels que $V \cap \Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : x_n > 0\}$. En particulier, le bord $\partial\Omega$ est une hypersurface.

Commençons donc par traiter le cas de la restriction à l'hyperplan $\{x \in \mathbf{R}^n : x_n = 0\}$.

THÉORÈME 4.2. *Soit $s > 1/2$, l'application*

$$\gamma : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n-1})$$
$$\varphi \to \gamma\varphi \;\; \textit{où}\; (\gamma\varphi)(x) = \varphi(x', 0)$$

se prolonge en une application continue

$$\gamma : H^s(\mathbf{R}^n) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1}).$$

PREUVE. Soit $u \in \mathcal{S}$, sa restriction à $x_n = 0$ peut être décrite à l'aide de la formule d'inversion de Fourier

$$u(x', 0) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix'\cdot\xi'} \hat{u}(\xi)\, d\xi \tag{6}$$

Montrons que cette formule a toujours un sens lorsque $u \in H^s$; si on pose

$$v(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int (1 + |\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} \underbrace{(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi)}_{\in L^2} d\xi_n$$

alors on a grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|v(\xi')|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \underbrace{\int (1 + |\xi|^2)^{-s}\, d\xi_n}_{= C_s(1+|\xi'|^2)^{-s+\frac{1}{2}}} \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi_n$$

ce qui prouve que $v \in L^2(\mathbf{R}^{n-1})$, on peut donc poser $\gamma(u) = \mathcal{F}^{-1}(v)$ et de plus, on a

$$\|\gamma(u)\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} = \int (1 + |\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}} |v(\xi')|^2\, d\xi' \leq C_s \|u\|^2_{H^s(\mathbf{R}^n)}$$

et $\gamma(u)$ coïncide avec $u(x', 0)$ lorsque $u \in \mathcal{S}$ d'après (6). □

COROLLAIRE 4.3. *Soit $k \in \mathbf{N}^*$, l'application*

$$\gamma : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^-) \to \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$$
$$u \to \gamma u \;\; \textit{où}\; (\gamma u)(x) = u(x', 0)$$

se prolonge en une application continue

$$\gamma : H^k(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^-) \to H^{k-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1}).$$

PREUVE. On utilise l'opérateur de symétrisation suivant

$$S(u)(x) = u(x', |x_n|)$$

défini pour les fonctions L^2. S est continu de $H^k(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^-)$ vers $H^k(\mathbf{R}^n)$ car[2] :

$$\partial^\alpha S(u) = (\operatorname{sgn} x_n)^{\alpha_n} S(\partial^\alpha u)$$

[2] C'est vrai pour les fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Par conséquent si on régularise $\partial_n(S(\chi_\varepsilon * u)) = \operatorname{sgn} x_n S(\chi_\varepsilon * \partial_n u)$ et en passant à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ dans $\mathcal{D}'$, on obtient la formule.

au sens des distributions. Et on définit l'opérateur trace par $\gamma \circ S$. □

DÉFINITION 4.4. *Soit $s \geq 0$ et soit Σ une hypersurface compacte de $\mathbf{R}^n$, l'espace $H^s(\Sigma)$ est l'ensemble des fonctions $u \in L^2(\Sigma)$ telles que pour tout $x_0 \in \Sigma$ et pour toute carte κ définie au voisinage de x_0 on ait $u \circ \kappa \in H^s_{y_0}(\mathbf{R}^{n-1})$ avec $y_0 = \kappa^{-1}(x_0)$.*

REMARQUE 4.5. Pour simplifier, on considère $s \geq 0$, ce qui permet de parler de fonctions sur Σ, mais on peut définir la notion de distribution sur Σ et les espaces $H^s(\Sigma)$ pour tout $s \in \mathbf{R}$.

DÉFINITION 4.6 (Norme sur $H^s(\Sigma)$). *Soit $(V_j, \kappa_j)_{1\leq j\leq k}$ une famille de cartes recouvrant Σ et soit $(\varphi_j)_{1\leq j\leq k}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, on définit alors*

$$\|u\|_{H^s(\Sigma)} = \sum_{j=1}^{k} \| \det \kappa'(\varphi_j u) \circ \kappa_j\|_{H^s(\mathbf{R}^{n-1})}.$$

D'autres choix de cartes ou de partitions donnent naissance à des normes équivalentes.

THÉORÈME 4.7. *Soit Σ une hypersurface compacte de $\mathbf{R}^n$ L'application*

$$\begin{aligned} \gamma_\Sigma : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n) &\to \mathcal{C}^0(\Sigma) \\ \varphi &\to \varphi|_\Sigma \end{aligned}$$

se prolonge en une application continue

$$\gamma_\Sigma : H^s(\mathbf{R}^n) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma)$$

lorsque $s > 1/2$.

PREUVE. Σ est compacte, on peut la recouvrir par une famille $(V_j)_{1\leq j\leq k}$ de voisinages de points x_j de Σ, auxquels correspondent des cartes κ_j. Soit $(\varphi_j)_{1\leq j\leq k}$ une partition de l'unité subordonnée à la famille $(V_j)_{1\leq j\leq k}$, on peut définir

$$\gamma_\Sigma(u) = \sum_{j=1}^{k} \gamma((\varphi_j u) \circ \kappa_j^{-1})) \circ \kappa_j$$

où $\gamma((\varphi_j u)\circ\kappa_j^{-1}))$ est défini grâce au théorème 4.2. Si $u \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^n)$ alors $\gamma(u) = u|_\Sigma$.

En outre, en utilisant l'invariance par difféomorphisme (cf. preuve du théorème 3.3), on a

$$\begin{aligned} \|\gamma(u)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma)} &\leq \sum_{j=1}^{k} \|\gamma((\varphi_j u) \circ \kappa_j\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} \leq C \sum_{j=1}^{k} \|(\varphi_j u) \circ \kappa_j)\|_{H^s(\mathbf{R}^n)} \\ &\leq C' \sum_{j=1}^{k} \|\varphi_j u\|_{H^s(\mathbf{R}^n)} \leq C'' \|u\|_{H^s(\mathbf{R}^n)} \end{aligned}$$

ce qui donne la continuité de l'application γ. □

THÉORÈME 4.8. *Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et soit Ω un ouvert borné dont le bord $\partial\Omega$ est régulier. L'application*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \cap L^2(\mathbf{R}^n) &\to \mathcal{C}^0(\partial\Omega) \\ \varphi &\to \varphi|_\Sigma \end{aligned}$$

se prolonge en une application continue

$$\gamma : H^k(\Omega) \to H^{k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

PREUVE. Le bord $\partial\Omega$ est compact, on peut donc le recouvrir par une famille $(V_j)_{1\leq j\leq k}$ de voisinages de points x_j du bord, auxquels correspondent des cartes κ_j. Soit $(\varphi_j)_{1\leq j\leq k}$ une partition de l'unité subordonnée à la famille $(V_j)_{1\leq j\leq k}$, on peut définir

$$\gamma(u) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(\gamma(u \circ \kappa_j)) \circ \kappa_j^{-1}$$

où γ est défini dans le corollaire 4.3. Puis on raisonne comme auparavant. □

DÉFINITION 4.9. *Soit Ω un ouvert borné dont le bord $\partial\Omega$ est régulier. On définit l'espace*

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma(u) = 0\}$$

des fonctions $H^1(\Omega)$ « nulles au bord ».

Pour terminer, on donne deux résultats de densité des fonctions $\mathcal{C}_0^\infty$ respectivement dans $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ qui sont à comparer entre eux.

PROPOSITION 4.10. *L'ensemble des restrictions à Ω de fonctions $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*

PROPOSITION 4.11. *L'ensemble $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$.*

REMARQUE 4.12. Dans le premier résultat En particulier, les fonctions $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ ne sont pas denses dans $H^1(\Omega)$! La limite d'une suite de telles fonctions a forcément une trace nulle au bord !

5. Inégalité de Poincaré

THÉORÈME 5.1 (Inégalité de Poincaré). *Soit Ω un ouvert borné dont le bord est régulier. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on ait*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

PREUVE. Il suffit de démontrer le résultat pour les fonctions $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ puis de procéder par densité. Supposons que Ω est contenu dans le cube $[-r, r]^n$, on a

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_j} \partial_j u(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n)\, dt$$

donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|u(x)|^2 \leq (x_j + r)\|\partial_j u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

et en intégrant, on obtient

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq 2r^2\|\partial_j u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

□

REMARQUE 5.2. Sur l'espace $H^1_0(\Omega)$, il y a donc équivalence entre les normes $\|u\|_{H^1(\Omega)} \simeq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. L'inégalité de Poincaré n'est vraie que parce que l'ouvert Ω est borné. Comme on peut le voir dans la preuve, il suffit de supposer Ω borné dans une direction.

PROPOSITION 5.3 (Formule de Green–Riemann). *Soit Ω un ouvert borné dont le bord est régulièr. Soient $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. On a la formule d'intégration par parties suivantes*

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_\nu u, v)_{L^2(\partial\Omega)}.$$

PREUVE. L'égalité est vraie pour les restrictions à Ω de fonctions $\mathcal{C}^\infty_0(\mathbf{R}^n)$. Ceci découle de considérations de géométrie différentielle (variété à bord, formule de Stokes) et Riemannienne (opérateur de Laplace-Beltrami, normale) que nous ne démontrerons pas. Par densité de ces fonctions dans l'espace $H^1(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$ la formule de Green-Riemann reste vraie telle qu'écrite. □

6. Application : problème de Dirichlet

On considère l'équation différentielle suivante avec données au bord.

$$\text{(Dirichlet)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = u_0 \end{cases}$$

C'est ce que l'on appelle le problème de Dirichlet.

DÉFINITION 6.1. *L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est le dual topologique de $H^1_0(\Omega)$, i.e. l'ensemble des formes linéaires continues sur $H^1_0(\Omega)$.*

LEMME 6.2. *Le Laplacien $-\Delta$ est un opérateur continu entre $H^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$.*

PREUVE. Soit $u \in H^1(\Omega)$, on considère la forme linéaire T_u définie par

$$\langle T_u, v\rangle = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

Cette forme est continue sur $H^1_0(\Omega)$ car l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|\langle T_u, v\rangle| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1_0(\Omega)}$$

en particulier $\|T_u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$. De plus, on a par définition l'égalité des deux distributions

$$T_u|_{\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)} = -\Delta u$$

ce qui permet de dire que (avec un léger abus) que $-\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ et $\|-\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|T_u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$. □

Pour commencer, nous donnons un théorème de relèvement.

THÉORÈME 6.3. *Soit $u_0 \in H^{k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, il existe $u \in H^k(\Omega)$ tel que $\gamma(u) = u_0$ et $\|u\|_{H^k(\Omega)} \le C\|u_0\|_{H^{k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$.*

PREUVE. Après utilisation d'une partition de l'unité et redressement par un difféomorphisme, il suffit de traiter le cas où $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : x_n < 0\}$. Notons $x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n$ les variables. Soit $u_0 \in H^{k-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$, on considère la fonction suivante

$$\tilde{u}(x) = c_k^{-1}\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{(1+|\xi'|^2)^{k-\frac{1}{2}}}{(1+|\xi'|^2+\xi_n^2)^k}\hat{u}_0(\xi')\Big).$$

où $c_k > 0$ est une constante à déterminer. Commençons par montrer que cette fonction est $H^k(\mathbf{R}^n)$: notons pour commencer que si $s > 1/2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_n}{(1+|\xi'|^2+\xi_n^2)^s} = \frac{1}{(1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^s}}_{=C_s<+\infty \text{ car } s>\frac{1}{2}}$$

par conséquent, on a

$$\int (1+|\xi|^2)^k |\hat{\tilde{u}}(\xi)|^2 \, d\xi = c_k^{-1} C_k \int (1+|\xi'|^2)^{k-\frac{1}{2}} |\hat{u}_0(\xi')|^2 \, d\xi' < +\infty.$$

De plus, on a

$$\widehat{\gamma(\tilde{u})}(\xi') = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\tilde{u}}(\xi) \, d\xi_n = c_k^{-1} C_k \hat{u}_0(\xi')$$

ce qui donne[3] $\gamma(\tilde{u}) = u_0$ si on choisit $c_k = C_k$. □

THÉORÈME 6.4. *Soit Ω un ouvert borné dont le bord est régulier. Soient $u_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$ alors le problème de Dirichlet admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ telle que*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le C\|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + C\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

PREUVE. Grâce au théorème de relèvement (avec $k = 1$), on peut se ramener au cas où $u_0 = 0$. Le produit hermitien

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx$$

est équivalent au produit hermitien usuel sur $H^1(\Omega)$ Par conséquent, d'après le théorème de Riesz, la forme linéaire $g \in H^{-1}(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$ peut être représentée

---

[3]Ceci prouve qu'étant donnée $u_0 \in H^{k-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$, il existe $\tilde{u} \in H^k(\mathbf{R}^n)$ telle que $\gamma(\tilde{u}) = u_0$. Bien sûr, $v = (\tilde{u}(x', x_n) + \tilde{u}(x', -x_n))/2$ convient également et $S(v) = \tilde{u}$ si S est l'opérateur de symetrisation. La restriction de v à $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : x_n < 0\}$ est $H^k(\Omega)$ et sa trace sur $x_n = 0$ telle que définie précédemment est donnée par $\gamma(Sv) = \gamma(v) = u_0$.

par un $v \in H_0^1(\Omega)$. Plus précisément, il existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}$ et

$$\langle g, \varphi \rangle = (v, \varphi)_{H_0^1(\Omega)}$$

pour toute fonction $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. En particulier, si $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, l'égalité précédente permet d'affirmer que $-\Delta v = g$ au sens des distributions. Ceci prouve le théorème.

Notons que d'après la formule de Green-Riemann, on a

$$(\nabla u, \nabla u)_{L^2(\Omega)} = (\Delta u, u)_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

pour tout $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. D'aprés l'inégalité de Poincaré, on a donc

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C^2 \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

soit

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C^2 \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Cette inégalité (appelée en général inégalité *a priori*) suffit à montrer le résultat (par un raisonnement faisant intervenir le théorème de Hahn-Banach). Ce type d'argumenataions permet d'aborder des problèmes faisant intervenir des EDP d'autre nature. □

7. Annexe : partition de l'unité

On commence par rappeler le résultat fondamental suivant (vu dans le cours de Samuel Kokh) :

Théorème 7.1. *Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert et $K \subset \Omega$ un compact. Il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\varphi = 1$ sur un voisinage de K.*

Dans la preuve, on utilisera le résultat suivant sur le support du produit de convolution de deux fonctions $\mathcal{C}_0^\infty$:

$$\operatorname{supp} \varphi * \psi \subset \operatorname{supp} \varphi + \operatorname{supp} \psi. \tag{7}$$

Preuve. Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(B(0,1))$ de moyenne égale à 1. On note

$$K_\delta = \{y \in \mathbf{R}^n : d(y, K) \leq \delta\}.$$

On chosit ε assez petit pour que $K_{3\varepsilon} \subset \Omega$. On considère

$$\varphi = \varepsilon^{-n} \chi(\cdot/\varepsilon) * 1_{K_{2\varepsilon}}$$

qui est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dont le support est compact d'après (7)

$$\operatorname{supp} \varphi \subset B(0, \varepsilon) + K_{2\varepsilon} \subset K_{3\varepsilon}$$

et de plus $0 \leq \varphi \leq 1$ et

$$\operatorname{supp}(1 - \varphi) = \operatorname{supp} \chi(\cdot/\varepsilon) * (1 - 1_{K_\varepsilon}) \subset B(0, \varepsilon) + \overline{K_{2\varepsilon}^c} \subset \overline{K_\varepsilon^c}$$

ce qui implique que $\varphi = 1$ sur K_ε. □

On se sert de ce résultat pour construire des partitions de l'unité.

THÉORÈME 7.2. *Soit* $(\Omega_j)_{1\leq j\leq k}$ *une famille finie d'ouverts de* $\mathbf{R}^n$*, et* K *un sous ensemble compact de* $\Omega = \cup_{j=1}^n \Omega_j$*. Il existe une famille de* k *fonctions* $\varphi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_j)$ *positives telles que*

$$\sum_{j=1}^k \varphi_j(x) = 1, \quad \forall x \in K$$

et $\sum_{j=1}^k \varphi_j(x) \leq 1$ *sur l'espace entier. Cette famille est appelée une partition de l'unité subordonnée à la famille* $(\Omega_j)_{1\leq j\leq k}$.

PREUVE. Il existe une famille de k compacts $K_j \subset \Omega_j$, telle que $K \subset \cup_{j=1}^k K_j$: d'après le premier résultat, il existe $\psi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_j)$ telle que $\psi_j = 1$ sur un voisinage de K_j. On note alors

$$\varphi_j = \psi_j \prod_{l=1}^{j-1}(1-\psi_l) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_j), \quad 1 \leq j \leq k$$

cette famille de fonctions est la partition recherchée puisque

$$1 - \sum_{j=1}^k \varphi_j = \prod_{j=1}^k (1-\psi_j)$$

est nulle sur $\cup_{j=1} K_j = K$. $\square$